Révisions & Oraux ; Série N°7

Exercice 1 Soit φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par X^4-1.

1. Montrer que φ est un endomorphisme. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Celle-ci est-elle inversible ? Si oui, préciser son inverse.

Exercice 2 [Mines PSI] 1. Calculer $\int_0^1 x^p(1-x)^q \,\mathrm{d}x$.

2. On dispose de p urnes contenant chacune p boules. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, l'urne i contient i BN et $p-i$ BB. On choisit une des urnes aléatoirement et on en tire $2n$ boule avec remise. On note $A_{n,p}$ l'évènement «on a tiré autant de BN que de BB». Déterminer $\mathbf{P}(A_{n,p})$, puis $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_{n,p})$ et $\lim_{p\to+\infty} \mathbf{P}(A_{n,p})$

Exercice 3 Montrer que M est inversible ou nulle si et seulement si $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rang}(AM) = \mathrm{rang}(MA)$.

Exercice 4 [Mines MP 2024] Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Étudier la convergence de (u_n).
2. On suppose $u_0 > 0$ et on pose $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer la convergence de la suite (v_n) vers un réel α puis que $0 \le \alpha - v_n \le \frac{1}{2^n u_n}$.
   b) Donner un équivalent de u_n.
3. ★ Donner un équivalent de u_n dans le cas $u_0 \in\,]-1,0[$.

Exercice 5 [Centrale MP 2024] Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

1. Montrer que, pour tout hyperplan H de E, il existe $a \in E$ tel que $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$.
2. Soit $(x_0,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que $\langle x_i, x_j\rangle = \alpha$ pour tous $i \neq j$, ou α est fixé.
   a) Si $\sum c_i x_i = 0$ est une relation de liaison non triviale, montrer que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $c_j + \alpha\sum_{i\neq j} c_i = 0$.
   b) Déterminer α.
3. Montrer l'existence d'une telle famille.

Exercice 6 [Mines MP 2024] Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent de rang $n-1$. Montrer que u admet exactement $n+1$ sous-espaces stables.

Exercice 7 [ENS MP 2024] Étudier, en fonction de $z_0 \in \mathbb{C}$, la convergence de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n e^{-i\,\mathrm{Im}(z_n)}$.

Exercice 8 [X MP 2024] Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1,1\}$.
On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et on note $N\colon \omega \mapsto \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(\omega) = 0\} \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.

1. Montrer que $\mathbf{E}(N) = +\infty$. 2. Exprimer $\mathbf{P}(N\ge2)$ en fonction de $\mathbf{P}(N\ge1)$. 3. Montrer que $\mathbf{P}(N=+\infty) = 1$.

Révisions & Oraux ; Série N°7

Exercice 1 Soit φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par X^4-1.

1. Montrer que φ est un endomorphisme. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Celle-ci est-elle inversible ? Si oui, préciser son inverse.

Exercice 2 [Mines PSI] 1. Calculer $\int_0^1 x^p(1-x)^q \,\mathrm{d}x$.

2. On dispose de p urnes contenant chacune p boules. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, l'urne i contient i BN et $p-i$ BB. On choisit une des urnes aléatoirement et on en tire $2n$ boule avec remise. On note $A_{n,p}$ l'évènement «on a tiré autant de BN que de BB». Déterminer $\mathbf{P}(A_{n,p})$, puis $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_{n,p})$ et $\lim_{p\to+\infty} \mathbf{P}(A_{n,p})$

Exercice 3 Montrer que M est inversible ou nulle si et seulement si $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rang}(AM) = \mathrm{rang}(MA)$.

Exercice 4 [Mines MP 2024] Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Étudier la convergence de (u_n).
2. On suppose $u_0 > 0$ et on pose $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer la convergence de la suite (v_n) vers un réel α puis que $0 \le \alpha - v_n \le \frac{1}{2^n u_n}$.
   b) Donner un équivalent de u_n.
3. ★ Donner un équivalent de u_n dans le cas $u_0 \in\,]-1,0[$.

Exercice 5 [Centrale MP 2024] Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

1. Montrer que, pour tout hyperplan H de E, il existe $a \in E$ tel que $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$.
2. Soit $(x_0,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que $\langle x_i, x_j\rangle = \alpha$ pour tous $i \neq j$, ou α est fixé.
   a) Si $\sum c_i x_i = 0$ est une relation de liaison non triviale, montrer que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $c_j + \alpha\sum_{i\neq j} c_i = 0$.
   b) Déterminer α.
3. Montrer l'existence d'une telle famille.

Exercice 6 [Mines MP 2024] Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent de rang $n-1$. Montrer que u admet exactement $n+1$ sous-espaces stables.

Exercice 7 [ENS MP 2024] Étudier, en fonction de $z_0 \in \mathbb{C}$, la convergence de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n e^{-i\,\mathrm{Im}(z_n)}$.

Exercice 8 [X MP 2024] Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1,1\}$.
On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et on note $N\colon \omega \mapsto \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(\omega) = 0\} \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.

1. Montrer que $\mathbf{E}(N) = +\infty$. 2. Exprimer $\mathbf{P}(N\ge2)$ en fonction de $\mathbf{P}(N\ge1)$. 3. Montrer que $\mathbf{P}(N=+\infty) = 1$.